Kansrekening 14-10-02

Tentamenopgave[1]

I

Een vaas bevat 10 rode en 20 blauwe ballen. Je trekt aselect een bal. Daarna wordt deze bal, samen met een bal van dezelfde kleur, terug gedaan in de vaas. Daarna trek je opniew een bal. Beschouw de gebeurtenissen:

$$A = \{\text{de eerste bal is blauw}\}$$

$$B = \{\text{de tweede bal is blauw}\}$$

Bepaal de kansen: $P(B \mid A)$ en $P(A \mid B)$.

II

1. Zij X een stochastische variabele (s.v.) die waarden in $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ aanneemt met kans $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $\lambda > 0$. (Dit wordt voortaan afgekort met $X \in \pi(\lambda)$).

Bereken de genererende functie $g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}s^k$.

2. Bereken $E(X)$ en $\sigma^2(X)$, eventueel m.b.v. vraag 1.

3. Laat X_1 en X_2 onafhankelijke s.v. zijn met $X_i \in \pi(\lambda_i)$. Bepaal de verdeling van $X = X_1 + X_2$.

4. Toon aan, onder dezelfde voorwaarden als in 3., dat $P(X_1 = k \mid X = n) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ en bepaal p en q.

5. Laat omgekeerd X_1 en X_2 twee s.v. zijn zodanig dat $X := X_1 + X_2 \in \pi(\lambda)$ en zó dat $P(X_1 = k \mid X = n) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

Bereken $P(X_1 = k, X_2 = \ell) = p_{k,\ell}$ en bepaal de verdelingen van X_1 en X_2.

Aanwijzing: Druk $p_{k,\ell}$ uit in termen van $P(X_1 = k, X_2 = \ell \mid X = k + \ell)$.

6. Onder de voorwaarden uit vraag 5. zijn X_1 en X_2 onafhankelijk ?

III

Zij $(X_i)_{i \geq 1}$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen met $P(X_i \leq t) = \int_0^t e^{-x}dx$ voor $t \geq 0$ en $P(X_i \leq t) = 0$ voor $t < 0$.

1. Bereken $E(X_i)$ en $\sigma^2(X_i)$.

2. Toon aan dat $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ verdeeld is met de dichtheid $Y(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}$ (waar $Y = 1_{[0,+\infty)}$ de Heaviside functie is).

Aanwijzing: We herinneren aan de dichtheid van de gammaverdeling met parameters $\alpha > 0$, $r > 0$: $\gamma_{\alpha,r}(x) = Y(x)\frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-rx}$ en aan het convolutieproduct $\gamma_{\alpha,r} * \gamma_{\beta,r} = \gamma_{\alpha+\beta,r}$.

3. Toon aan dat voor alle $\lambda \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\lambda\sqrt{n}+n} \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-x^2/2}dx$$

Aanwijzing: Gebruik de centrale limiet stelling.

[1]De onderdelen I, II en III zijn onafhankelijk